

на правах рукописи

СУШКОВ Сергей Владимирович

**КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ В  
ПРОСТРАНСТВАХ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ  
ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ И ПРИЧИННОЙ СТРУКТУРАМИ**

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ — 2006

Работа выполнена на кафедре геометрии Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор Аминова Ася Васильевна

доктор физико-математических наук,  
профессор Бронников Кирилл Александрович

доктор физико-математических наук,  
с.н.с. Каменщик Александр Юрьевич

**Ведущая организация:**

Красноярский государственный университет

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2006 г. в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании Диссертационного совета Д212.081.15 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, д.18, ауд. 210.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2006 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
профессор

Ерёмин М.В.

Theory Under the Influence of External Conditions". Ed. M.Bordag—Teubner, Leipzig.—1996.—P.121-123.

24. Сушков С.В. *Квантованное скрученное скалярное поле в модели с непотенциальным гравитационным полем* // Грав. энергия и грав. волны. Дубна: Изд-во ОИЯИ.—1993.—С.222-231.
25. Сушков С.В. *Эффект Казимира в машине времени Морриса-Торна-Юртсевера* // Грав. энергия и грав. волны. Дубна: Изд-во ОИЯИ.—1990.—С.151-157.
26. Сушков С.В. *О нулевой энергии вакуума скалярного поля в модели планкеона* // Гравитация и теория относительности, Вып.28. Казань: Изд-во КГУ.—1991.—С.131-134.

тогда построено аналитическое приближение для поляризации вакуума массивного скалярного поля в пространстве-времени статической сферически симметричной кротовой норы. Проведено детальное обсуждение условий применимости полученных результатов.

8. Построено новое равномерное приближение для вакуумных средних величин  $\langle 0|\phi^2|0\rangle^{ren}$  и  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$  для квантованного скалярного поля с произвольной массой и связью с кривизной в пространстве-времени двумерной черной дыры. Это приближение использовано для построения аналитического приближения для  $\langle 0|\phi^2|0\rangle^{ren}$  в модели двумерной черной дыры. Проведено сравнение полученных результатов с результатами численных вычислений и показано, что новое приближение хорошо работает как вблизи, так и вдали от горизонта черной дыры.

9. Рассмотрено поведение квантованного комплексного скалярного поля в пространстве-времени с замкнутыми времениподобными мировыми линиями. Детально изучены две модели: двумерное пространство-время с хронологическим горизонтом и пространство Мизнера. Для этих моделей вычислен перенормированный вакуумный тензор энергии-импульса  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$ . Установлена область значений параметров задачи, для которых тензор энергии-импульса сингулярен на хронологическом горизонте, что свидетельствует о квантовой неустойчивости хронологического горизонта. Показано, что всегда существует квантовое состояние, в котором вакуумный тензор энергии-импульса комплексного скалярного поля остается конечным на хронологическом горизонте.

10. Изучено рождение частиц скалярного поля в процессе формирования хронологического горизонта. Показано, что число частиц, рожденных в каждой моде, и полное число частиц, остаются конечными в процессе формирования горизонта. Этот результат указывает на то, что процесс рождения частиц не препятствует образованию хронологического горизонта.

11. Проведен детальный анализ проблем, возникающих при использовании стандартной процедуры квантования полей в пространствах с замкнутыми времениподобными мировыми линиями. Показано, что в этом случае нарушается требование полноты набора положительно- и отрицательно-частотных решений. Сформулирована гипотеза, названная принципом полноты, которая модифицирует схему квантования и расширяет ее на случай квантованных полей в пространствах, не обладающих глобальной гиперболической структурой. В качестве примера найдена функция Адамара и вычислена вакуумная поляризация  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  для скалярного поля  $\phi$  на 4-мерном пространственноподобном цилиндре (с замкнутыми времениподобными линиями). Показано, что полученный с

Роман<sup>6</sup> получили новый тип энергетических условий — так называемые квантовые неравенства, накладывающие дополнительные ограничения на пространственно-временные и полевые конфигурации. Следствия, к которым приводят квантовые неравенства, интенсивно изучаются в настоящее время.

Важным следствием существования кротовых нор является образование в пространстве-времени замкнутых времениподобных мировых линий. Для решения этой проблемы, известной как проблема машины времени, Хокинг выдвинул гипотезу о защите хронологии,<sup>7</sup> гласящую, что законы физики запрещают формирование машины времени в будущем. В качестве механизма, обеспечивающего защиту хронологии, он предложил рассматривать возможную квантовую нестабильность хронологического горизонта, т.е. гиперповерхности, разделяющей области, содержащие и не содержащие замкнутые времениподобные линии. Большой интерес к гипотезе Хокинга и проблеме машины времени в целом привел к интенсивным исследованиям в этой области. В частности, при этом был достигнут значительный прогресс в понимании поведения квантованных полей вблизи хронологического горизонта.

Астрофизические данные, полученные в последние годы для сверхновых типа Ia,<sup>8</sup> убедительно свидетельствуют в пользу того, что наша Вселенная в настоящее время находится в состоянии ускоренного расширения. Объяснение этого факта в рамках общей теории относительности требует предположения, что значительная часть Вселенной ( $\sim 73\%$ ) состоит из гипотетической темной энергии: экзотической материи, обладающей положительной плотностью энергии  $\rho > 0$  и отрицательным давлением  $p = w\rho$ , где  $w < -1/3$ . При этом наблюдения не исключают случай  $w < -1$ ; в этом случае темную энергию называют *фантомной*. Недавно было показано, что экзотические свойства темной (фантомной) энергии, которые проявляют себя в поведении Вселенной в целом, могут также проявляться и в малых масштабах, обеспечивая существование кротовых нор.

Все сказанное выше свидетельствует о том, что исследования классических и квантованных полей в пространствах с нетривиальными топологической и причинной структурами являются, безусловно, актуальными.

<sup>6</sup>Ford L. H., Roman T. A. *Averaged energy conditions and quantum inequalities* // Physical Review D.—1995.—V.51.—P.4277-4286.

<sup>7</sup>Hawking S. W. *Chronology protection conjecture* // Physical Review D.—1992.—V.46.—P.603-611.

<sup>8</sup>Riess A.G. et al, *The Farthest Known Supernova: Support for an Accelerating Universe and a Glimpse of the Epoch of Deceleration* // Astrophys.J.—2001.—V.560.—P.49-71.

## Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является исследование круга проблем, связанных с возможной нетривиальными топологической и причинной структурами физического пространства-времени, включая проблему существования кротовых нор в рамках общей теории относительности, проблему “машины времени” или замкнутых времениподобных мировых линий, и проблемы, связанные с особенностями поведения классических и квантованных полей в пространствах с нетривиальной топологической и причинной структурой.

В диссертационной работе решаются следующие задачи:

1. Изучение динамических кротовых нор в общей теории относительности с фантомным скалярным полем.
2. Исследование роли темной энергии (энергии вакуума) в обеспечении условий существования кротовых нор. Построение и исследование моделей, описывающих кротовые норы с темной энергией.
3. Исследование статических сферически симметричных кротовых нор, поддерживаемых скалярным полем с потенциалом хиггсовского типа.
4. Изучение условий существования доменных стенок в пространстве-времени статической сферически симметричной кротовой норы.
5. Определение условий существования и построение явных самосогласованных решений, описывающих кротовые норы в полуклассической теории гравитации.
6. Вычисление энергии нулевых колебаний квантованного массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы.
7. Разработка метода построения аналитических приближенных выражений для вакуумного среднего значения  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  (поляризация вакуума скалярного поля  $\phi$ ) и вакуумного тензора энергии-импульса  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$  скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы.
8. Изучение поведения квантованного комплексного скалярного поля вблизи хронологического горизонта в пространстве Мизнера.
9. Изучение рождения частиц скалярного поля в процессе формирования хронологического горизонта в динамической модели.
10. Анализ проблем, возникающих при использовании стандартного подхода к процедуре квантования полей в пространствах с замкнутыми времениподобными линиями; разработка модифицированной схемы квантования.

## Научные положения, выносимые на защиту

1. Скалярное поле с отрицательной кинетической энергией и с экспонен-

3. В рамках общей теории относительности рассмотрена модель, в которой источником гравитационного поля выступает нелинейное, неминимально связанное с кривизной скалярное поле  $\phi$  с потенциалом  $V(\phi)$  хиггсовского типа (т.е. с двумя минимумами). Для этой модели выполнено детальное аналитическое исследование системы нелинейных уравнений гравитационного и скалярного полей. Проведена классификация всех допустимых полевых конфигураций и исключены те из них, для которых решения с кротовыми норами невозможны; конфигурации, допускающие кротовые норы, были получены и исследованы численно. Полученные решения описывают полевые конфигурации нового типа, представляющие собой сферические доменные стенки, локализованные вблизи горловины кротовой норы.

4. Рассмотрен вопрос о существовании доменных стенок в пространстве-времени статической кротовой норы. Найдено решение уравнения движения скалярного поля с потенциалом  $\phi^4$  в пространстве-времени кротовой норы, описывающее сферическую доменную стенку, проведен численный анализ полученного решения в модели кротовой норы. Показано, что плотность энергии конфигурации с доменной стенкой в горловине кротовой норы отрицательна при некоторых значениях параметра связи  $\xi$  со скалярной кривизной.

5. Поставлена задача построения статических сферически симметричных кротовых нор в полуклассической теории гравитации, описываемой уравнениями Эйнштейна с вакуумным тензором энергии-импульса в правой части:  $G_{\mu\nu} = 8\pi\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$ . Для приближенного описания величины  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$  использовано аналитическое приближение, предложенное Фроловым и Зельниковым для конформно-инвариантных квантованных полей со спином 0, 1/2, 1. В рамках этого приближения построено самосогласованное решение, описывающее полуклассическую кротовую нору.

6. Методом дзета-функции вычислена энергия нулевых колебаний квантованного массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы (модель короткого горла). Выполнено детальное исследование коэффициентов теплового ядра оператора Лапласа  $\Delta - m^2 - \xi R$ . Показано, что энергия нулевых колебаний принимает минимальное значение для определенного радиуса горловины кротовой норы, соответствующего равновесной конфигурации. В частности, для  $\xi = 1/6$  (конформная связь) радиус горловины стабильной полуклассической кротовой норы имеет значение  $a \approx 0.0141L_p$ , где  $L_p$  — планковская длина.

7. В случае скалярного поля разработан метод построения аналитических приближенных выражений для поляризации вакуума  $\langle 0|\phi^2|0\rangle^{ren}$  и вакуумного тензора энергии-импульса  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$ . С помощью этого ме-

Причинная структура пространства-времени  $\overline{M}$  определяется расположением световых конусов, построенных в каждой точке пространства  $\overline{M}$ . Пространственно-временная диаграмма, показанная на рисунке (11), иллюстрирует, как конус будущего поворачивается со временем таким образом, что в некоторый момент времени  $\eta = \eta_*$ , зависящий от параметра  $a_0$ , в  $\overline{M}$  появляются замкнутые изотропные линии, а значит, формируется хронологический горизонт. Пространство-время  $\overline{M}$  может быть представлено как фактор пространство:  $\overline{M} = M/\mathcal{R}$ , где  $M$  — универсальное накрывающее пространство для  $\overline{M}$  (в нашем случае это вся плоскость  $(\eta, \xi)$ ) и  $\mathcal{R}$  — отношение эквивалентности  $(\eta, \xi + L) \equiv (\eta, \xi)$ .

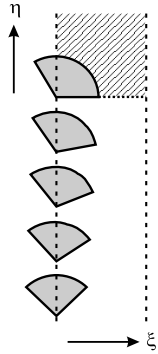


Рис. 11. Диаграмма иллюстрирует поворот конуса будущего в пространстве-времени  $M$ . Вертикальные линии отмечают границы полосы  $\{t \in (-\infty, \infty), \xi \in [0, L]\}$ . Серым цветом на диаграмме показана область, содержащая замкнутые времениподобные линии.

Безмассовое скалярное поле  $\phi$  подчиняется уравнению  $\square\phi = 0$  и удовлетворяет периодическим ( $\phi(\eta, \xi + L) = \phi(\eta, \xi)$ ) или антипериодическим ( $\phi(\eta, \xi + L) = -\phi(\eta, \xi)$ ) условиям. Уравнение поля для метрики (20) принимает вид

$$\left[ (1 - a^2) \partial_\eta^2 + 2a \partial_\eta \partial_\xi - \partial_\xi^2 - 2a a' \partial_\eta + a' \partial_\xi \right] \phi(\eta, \xi) = 0,$$

где  $\partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$  и штрих обозначает производную по  $\eta$ :  $a' = da/d\eta$ . Полный ортонормированный набор решений этого уравнения в in-области ( $\eta \rightarrow -\infty$ ) имеет вид  $\phi_n^{(\pm, \text{in})} = D_n^{(\text{in})} e^{ik_n \xi} e^{\mp i \omega \eta}$ , где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $D_n^{(\text{in})} = (1/4\pi |n + \alpha|)^{1/2}$ ,  $k_n = 2\pi(n + \alpha)/L$ ,  $\omega = |k_n|$ ,  $\alpha = 0, \frac{1}{2}$  и  $\phi_n^{(\pm, \text{in})}$  — положительно- и отрицательно-частотные решения (“in-моды”) в in-области. Аналогично, в out-области ( $\eta \rightarrow \infty$ ) полный ортонормированный набор решений имеет вид

$$\phi_n^{(\pm, \text{out})} = D_n^{(\text{out})} e^{ik_n \xi} e^{-ik_n a_0 \beta^{-1} \eta} e^{\mp i \omega \beta^{-1} \eta},$$

где  $D_n^{(\text{out})} = (\beta/4\pi |n + \alpha|)^{1/2}$ ,  $\beta = 1 - a_0^2$  и  $\phi_n^{(\pm, \text{out})}$  — положительно- и отрицательно-частотные решения (“out-моды”) в out-области. Связь между in- и out-модами выражается следующим образом:  $\phi_n^{(\text{in})}(\eta, \xi) =$

замкнутыми времениподобными линиями, приводят к результатам, согласующимся с уже имеющимися.

## Достоверность результатов диссертации

Достоверность результатов, выводов и научных положений диссертационной работы обеспечивается:

- корректностью построения математических моделей физических систем в пространствах с нетривиальными топологической и причинной структурами;
- корректностью проведенных математических преобразований и расчетов;
- согласием полученных в диссертации результатов с уже имеющимися.

## Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Построено точное аналитическое решение, описывающее нестатическую кротовую нору в общей теории относительности с фантомным скалярным полем; кротовая нора соединяет удаленные области расширяющейся с ускорением Вселенной.
2. Впервые установлено, что темная энергия с уравнением состояния  $p = w\rho$ , где  $w < -1$ , доминирующая в ускоряющейся Вселенной, обеспечивает существование кротовых нор. Показано, что в случае статического сферически симметричного распределения темная энергия оказывается заключенной в сферической области вокруг горловины кротовой норы, причем максимальный размер этой области ограничен и определяется параметром  $w$ .
3. Исследованы полевые конфигурации нового типа, представляющие собой сферические доменные стенки, локализованные вблизи горловины кротовой норы.
4. В рамках полуклассического подхода впервые исследована проблема существования кротовых нор в общей теории относительности с квантованными полями, выступающими в роли источника гравитации. Построены самосогласованные решения, описывающие полуклассические кротовые норы.
5. Вычислена энергия нулевых колебаний квантованного массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы и получена оценка величины радиуса горловины полуклассической кротовой норы.

6. Усовершенствован метод построения аналитических приближенных выражений для вакуумных средних значений квадрата скалярного поля  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  (поляризации вакуума) и тензора энергии-импульса скалярного поля  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ . Метод успешно использован при построении аналитического приближения для поляризации вакуума массивного скалярного поля в пространстве-времени статической сферически симметричной кротовой норы.

7. Изучено поведение квантованного комплексного скалярного поля вблизи хронологического горизонта и показано, что существуют квантовые состояния, для которых тензор энергии-импульса скалярного поля остается конечным на горизонте.

8. Исследовано рождение частиц скалярного поля в процессе формирования хронологического горизонта. Установлено, что полное число частиц, рожденных в этом процессе, является конечным. Этот результат указывает на то, что процесс рождения частиц не препятствует образованию хронологического горизонта.

9. Проведен детальный анализ проблем, возникающих при использовании стандартной процедуры квантования полей в пространствах с замкнутыми времениподобными мировыми линиями, и сформулирована гипотеза, названная принципом полноты, которая модифицирует схему квантования и расширяет ее на случай квантованных полей в пространствах, не обладающих глобальной гиперболической структурой.

## Апробация работы

Основные материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и рабочих совещаниях: Международная конференция по гравитации, космологии, астрофизике, посвященная 90-летию со дня рождения проф. К.П. Станюковича (Москва, март, 2006); 12 Российская гравитационная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (Казань, июнь, 2005); Международная конференция “Astrophysics and cosmology after Gamow” (Odessa, Ukraine, August, 2004); 3 Международная школа-семинар “Проблемы теоретической и наблюдательной космологии” (Ульяновск, сентябрь, 2003); V международное рабочее совещание “Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions” (Германия, Лейпциг, 2001); Международное рабочее совещание и школа “Quantum Gravity and Superstring” (Россия, Дубна, 2001); V международная конференция “Gravitation and Astrophysics of Asian-Pacific Countries” (Россия, Москва, 2001); 2 Международная школа-семинар “Проблемы теоретической космологии” (Ульяновск, сентябрь,

имеется особый случай, отвечающий значению конформной связи  $\xi = \frac{1}{6}$ . При этом выражение для тензора энергии-импульса принимает вид

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren} = \frac{1}{t^4} \text{diag}(N, 3N, -N, -N),$$

$$\text{где } N = \pi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{12} - \frac{n^3}{3} \right) \Psi_n.$$

В этом случае поведение тензора  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren}$  определяется только значением  $N$ . График  $N(a, \alpha)$  как функции  $\alpha$  при фиксированном значении  $a$  показан на рисунке 10. Видно, что функция  $N(a, \alpha)$  является знакопеременной и обращается в нуль в некоторой точке  $\alpha = \alpha_*$ . При этом все компоненты  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{ren}$  тождественно обращаются в нуль во всем пространстве Мизнера, включая хронологический горизонт. Отсюда можно сделать вывод, что для некоторых значений параметра автоморфности вакуумный тензор энергии-импульса комплексного скалярного поля остается регулярным на хронологическом горизонте, не препятствуя тем самым появлению замкнутых времениподобных кривых.

В параграфе 4.4 изучается рождение частиц в процессе формирования хронологического горизонта. Главная цель исследования заключается в ответе на вопрос: может ли рождение частиц предотвратить формирование хронологического горизонта?

Модель пространства-времени, в котором формируется хронологический горизонт, представляет собой цилиндр  $\bar{M} = R^1 \times S^1$ , заданный на плоскости  $(\eta, \xi)$  в виде полосы  $\{\eta \in (-\infty, +\infty), \xi \in [0, L]\}$  с отождествленными точками  $(\eta, 0) \equiv (\eta, L)$ , лежащими на границах  $\gamma^-$ :  $\xi = 0$  и  $\gamma^+$ :  $\xi = L$ . На  $\bar{M}$  задана метрика

$$ds^2 = d\eta^2 + 2a(\eta)d\eta d\xi - (1 - a^2(\eta))d\xi^2, \quad (20)$$

где  $a(\eta)$  — монотонно возрастающая функция с асимптотическим поведением:  $a(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow -\infty$ ,  $a(\eta) \rightarrow a_0$  при  $\eta \rightarrow +\infty$ , где  $a_0$  — некоторая константа. Метрика (20) описывает искривленное пространство-время, которое является асимптотически плоским в удаленном прошлом  $\eta \rightarrow -\infty$  (“in-область”) и в удаленном будущем  $\eta \rightarrow \infty$  (“out-область”).

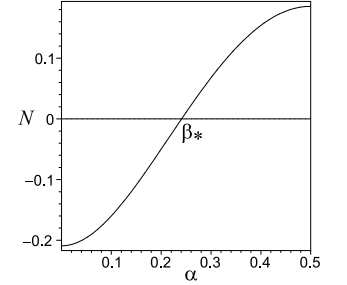


Рис. 10. График  $N(a, \alpha)$  как функции  $\alpha$  при фиксированном значении  $a = 1$ .

4. **Четвертая глава** посвящена изучению квантованных полей в пространстве-времени с замкнутыми времениподобными линиями.

В **параграфе 4.1** детально обсуждается метод накрывающего пространства, являющийся эффективным инструментом при построении квантовой теории поля в многосвязных пространствах.<sup>17</sup> Основная идея этого метода состоит в том, чтобы вместо полей на исходном многосвязном многообразии  $M$  рассматривать поля, подчиняющиеся некоторым дополнительным ограничениям в универсальном накрывающем пространстве  $\tilde{M}$ .

**Параграф 4.2** посвящен исследованию квантованного комплексного скалярного поля в двумерной модели пространства-времени с хронологическим горизонтом. Модель представляет собой двумерное локально статическое пространство-время  $M$  с метрикой  $ds^2 = -e^{-2Wl}dt^2 + dl^2$ , где  $W$  — параметр,  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $l \in [0, L]$ , и принято следующее правило отождествления точек:  $(t, 0) \longleftrightarrow (At, L)$ , где  $A \equiv e^{WL}$ . Уравнения изотропных геодезических в  $M$  имеют вид  $u_{\pm} = \text{const}$ , где  $u_{\pm} = W^{-1}e^{Wl} \pm t$  — изотропные координаты. Область  $R_+ : u_+ u_- > 0$  не содержит замкнутых мировых линий, тогда как в области  $R_- : u_+ u_- < 0$  такие линии существуют.  $R_+$  называется областью с ненарушенной хронологией, а  $R_-$  — областью с нарушенной хронологией. Линии  $u_+ = 0$  и  $u_- = 0$  являются замкнутыми изотропными геодезическими, разделяющими  $R_+$  и  $R_-$ ; они формируют хронологические горизонты  $H_+$  и  $H_-$  соответственно.

Универсальным накрывающим пространством  $\tilde{M}$  для  $M$  является пространство-время с метрикой  $ds^2 = -e^{-2Wl}dt^2 + dl^2$ , где  $l \in (-\infty, \infty)$ . В безразмерных координатах  $\eta = Wt$ ,  $\xi = \exp(Wl)$  эта метрика принимает следующий вид:  $d\tilde{s}^2 = (W\xi)^{-2}(-d\eta^2 + d\xi^2)$ . Действие оператора  $\gamma_n \equiv (\gamma)^n$  на  $M$ , где  $\gamma$  — генератор фундаментальной группы  $\Gamma$ , описывается соотношениями  $\gamma_n \eta = A^n \eta$ ,  $\gamma_n \xi = A^n \xi$ . Полоса  $\xi \in (1, A)$ ,  $\eta \in (-\infty, \infty)$  представляет собой фундаментальный домен.

Комплексное безмассовое скалярное поле описывается лагранжианом

<sup>17</sup>Dowker J. S. *Quantum mechanics and field theory on multiply connected and on homogeneous spaces* // J.Phys. A.—1972.—V.5.—P.936-943.

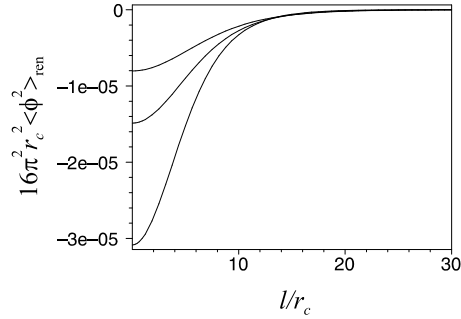


Рис. 8. Величина  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  для массивного скалярного поля в пространстве кротовой норы. Кривые на графике соответствуют значениям  $\rho_0 = r_0/r_c = 10, 12, 14$  (снизу вверх).

где  $\xi$  — константа неминимальной связи скалярного поля с кривизной. В случае  $\xi > 0$  теория с действием (2) допускает решения, описывающие кротовые норы. Впервые подобное решение было получено в статическом сферически симметричном случае для безмассового конформного ( $\xi = 1/6$ ) скалярного поля Бронниковым.<sup>12</sup> Более общий случай, включающий произвольные значения параметра  $\xi$ , был рассмотрен Барчелло и Виссером,<sup>11</sup> которые доказали, что статические сферически симметричные решения типа кротовых нор возможны для всех значений  $\xi > 0$ .

**Параграф 2.2** посвящен построению и исследованию *динамических* кротовых нор с геометрией, зависящей от времени. В качестве модели рассматривается теория гравитации с фантомным скалярным полем  $\phi$ , описываемая действием (1). Потенциал скалярного поля  $V$  выбирается в экспоненциальной форме:  $V(\phi) = V_0 \exp(-k\phi)$ . Уравнения Эйнштейна и уравнение движения скалярного поля, соответствующие действию (1), имеют вид

$$R_{\mu\nu} = 8\pi [-\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} V_0 \exp(-k\phi)], \quad (3)$$

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi = k V_0 \exp(-k\phi). \quad (4)$$

Решение задачи о построении нестатического сферически симметричного решения дает следующая теорема:

**Теорема.** *Нестатическое сферически симметричное решение системы уравнений (3), (4) существует тогда и только тогда, когда  $V_0 > 0$ ; в этом случае оно имеет вид*

$$ds^2 = -e^{-2\alpha^2 at + 2u} dt^2 + e^{2at - 2u} [dr^2 + (r^2 + r_0^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (5)$$

$$\phi(t, r) = (4\pi\alpha^2)^{-1/2} [u(r) + \alpha^2 at],$$

где  $r \in (-\infty, \infty)$ ,  $m, r_0, a$  — параметры,  $u(r) = \frac{m}{r_0} \arctg \frac{r}{r_0}$ ,  $\alpha^2 = \frac{m^2}{m^2 + r_0^2}$ ,  $k = 4\alpha\pi^{1/2}$ ,  $V_0 = (8\pi)^{-1}a^2(3 + \alpha^2)$ .

В случае  $a = 0$  указанное решение описывает *статическую* кротовую нору, найденную ранее в работах Эллиса<sup>11</sup> и Бронникова<sup>12</sup>. В случае  $a \neq 0$  и  $\alpha = 0$  метрика (5) принимает простой вид

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2at} [dr^2 + (r^2 + r_0^2) d\Omega^2]. \quad (6)$$

Следует отметить, что, хотя метрика (6) — нестатическая, скалярное поле  $\phi$  не зависит от времени  $t$ . Потенциал скалярного поля  $V$  в данном

<sup>11</sup>Barceló C., Visser M. *Scalar fields, energy conditions and traversable wormholes* // Classical and Quantum Gravity.—2000.—V.17.—P.3843-3864.

случае обращается в константу:  $V \equiv 3a^2/8\pi$ , что соответствует положительной космологической постоянной  $\Lambda = 3a^2$  в исходном действии (1). В каждый момент времени метрика (6) асимптотически (т.е. в пределе  $r \rightarrow \pm\infty$ ) совпадает с метрикой мира Де Ситтера, а в промежуточной области она описывает горловину, соединяющую две асимптотические области. Таким образом, пространство-время (6) представляет собой кротовую нору, соединяющую две вселенные Де Ситтера.

В случае  $\alpha \neq 0$  удобно ввести собственное время  $\tau$  при помощи соотношения  $-\alpha^2 a \tau = \exp(-\alpha^2 at)$ . При этом метрика (5) принимает вид

$$ds^2 = -e^{2u} d\tau^2 + |\alpha^2 a \tau|^{-2/\alpha^2} e^{-2u} [dr^2 + (r^2 + r_0^2) d\Omega^2],$$

где  $\tau$  меняется в интервале от  $-\infty$  до  $0_-$ . В пределе  $r \rightarrow \pm\infty$  эта метрика описывает однородную пространственно плоскую вселенную:

$$ds^2 = -d\tilde{\tau}^2 + |\tilde{\tau}|^{-2/\alpha^2} [d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2],$$

с масштабным фактором  $a(\tilde{\tau}) = |\tilde{\tau}|^{-1/\alpha^2}$  и скалярной кривизной  $R = 6(2 + \alpha^2)/\alpha^4 \tilde{\tau}^2$ . Соответствующий параметр Хаббла  $\dot{a}/a$  равен  $|\alpha^2 \tilde{\tau}|^{-1}$ , и параметр, характеризующий ускорение вселенной,  $\ddot{a}/\dot{a}$ , равен  $(1 + \alpha^2)(\alpha^4 \tilde{\tau}^2)^{-1}$ . Видно, что вселенная расширяется с ускорением в сторону “финальной” сингулярности в момент времени  $\tilde{\tau} = 0_-$ , и при этом параметр Хаббла и ускорение вселенной возрастают до бесконечности. Таким образом, в случае  $\alpha \neq 0$  решение (5) представляет собой метрику кротовой норы, которая соединяет две однородные пространственно плоские вселенные, расширяющиеся с неограниченно возрастающим ускорением.

**В параграфе 2.3** изучаются кротовые норы, существование которых обеспечивается темной энергией. Современные астрофизические данные, связанные с независимыми наблюдениями сверхновых типа Ia<sup>12</sup> и реликтового излучения,<sup>13</sup> указывают на то, что наша Вселенная в настоящее время находится в состоянии ускоренного расширения. Объяснение этого факта в рамках общей теории относительности требует предположения, что значительная часть Вселенной ( $\sim 70\%$ ) состоит из гипотетической *темной энергии* с отрицательным давлением  $p$  и уравнением состояния  $p = w\rho$ , где  $w < -1/3$ .

<sup>12</sup>Grant A. et al. *The farthest known supernova: Support for an accelerating Universe and a glimpse of the epoch of deceleration* // Astrophys. J.—2001.—V.560.—P.49-71.

<sup>13</sup>Bennett C. L. et al. *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results* // Astrophys. J. Suppl.—2003.—V.148.—P.1.

нения имеет вид<sup>16</sup>

$$G_E(x, \tau; x, \tilde{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \cos[\omega(\tau - \tilde{\tau})] \sum_{l=0}^\infty \left[ (2l+1) P_{\omega l}^+ P_{\omega l}^- - \frac{1}{r f^{1/2}} \right],$$

где  $\tau = it$  — евклидово время, а моды  $P_{\omega l}^\pm$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{h} P'' + \left[ \frac{2}{r h} + \frac{f'}{2 f h} - \frac{h'}{2 h^2} \right] P' - \left[ \frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R \right] P = 0.$$

Подстановка в это уравнение мод  $P_{\omega l}^\pm$ , взятых в представлении ВКБ:

$$P_{\omega l}^\pm = \frac{1}{(2r^2 W)^{1/2}} \exp \left[ \pm \int^r W \left( \frac{h}{f} \right)^{1/2} dr \right],$$

дает следующее уравнение для новой неизвестной функции  $W(r)$ :

$$W^2 = (W^{(0)})^2 + \frac{1}{2r} \left( \frac{f}{h} \right)' + \xi R f + \frac{1}{2} \frac{f}{h} \frac{W''}{W} + \frac{1}{4} \left( \frac{f}{h} \right)' \frac{W'}{W} - \frac{3}{4} \frac{f}{h} \frac{W'^2}{W^2},$$

где  $W^{(0)} = [\omega^2 + m^2 f + l(l+1)f/r^2]^{1/2}$ . Последнее уравнение решается методом итераций. Для построения приближенного выражения для величины  $\langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle$  достаточно учета первой итерации, что соответствует приближению второго порядка относительно производных метрических функций.

В диссертационной работе такое приближение построено в явном виде. В случае простой модели кротовой норы, описываемой метрикой  $ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (l^2 + l_0^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  аналитическое приближение для  $\langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle$  принимает вид

$$16\pi^2 r_c^2 \langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}} = \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{(\rho^2 + \rho_0^2)^2} \right] \ln \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^2 + \rho_0^2} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^2 + \rho_0^2} - \frac{b_1}{(\rho^2 + \rho_0^2)^2} + \frac{b_2}{(\rho^2 + \rho_0^2)^3} + \frac{\rho^2}{(\rho^2 + \rho_0^2)^3} \left[ b_3 + \frac{b_4}{\rho^2 + \rho_0^2} + \frac{b_5}{(\rho^2 + \rho_0^2)^2} \right],$$

где  $\rho = ml$  — безразмерная собственная радиальная координата,  $\rho_0 = ml_0$  — безразмерный радиус горловины, и числа  $b_i$  имеют значения  $b_1 = \frac{31}{160}$ ,  $b_2 = 8.51 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_3 = \frac{13}{48}$ ,  $b_4 = 5.851 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_5 = 5.126 \cdot 10^{-3}$ . На рис. 8 представлены результаты вычислений, выполненных с использованием данного выше аналитического приближения.

<sup>16</sup>Anderson P. R., Hiscock W. A., Samuel D. A. *Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static spherically symmetric spacetimes* // Physical Review D.—1995.—V.51.—P.4337-4358.



среднего значения тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 0, 1/2 или 1. Решение полуклассических уравнений Эйнштейна (12) строится в классе статических сферически симметричных метрик

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (13)$$

где  $l \in (-\infty, \infty)$  и функция  $r(l)$  удовлетворяет условиям, необходимым для описания кротовой норы. В этом случае система уравнений Эйнштейна (12) с тензором энергии-импульса, взятом в приближении Фролова-Зельникова, содержит два независимых уравнения, в качестве которых можно взять  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$  и  $R = -8\pi T$ , получив в результате

$$\frac{1}{16\pi} R = (\alpha + q_1) \left[ -\frac{2}{3} R_{;\epsilon}^{\epsilon} - 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} R^2 \right] + q_2 \left[ -\frac{2}{3} R_{;\epsilon}^{\epsilon} - \frac{1}{12} R^2 \right], \quad (14)$$

$$\frac{1}{16\pi} R = \frac{1}{2} \alpha \left[ -\frac{2}{3} R_{;\epsilon}^{\epsilon} - 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} R^2 \right]. \quad (15)$$

Здесь  $\alpha = (2^9 \times 45\pi^2)^{-1} [12h(0) + 18h(1/2) + 72h(1)]$ , где  $h(s)$  — число спиральностей безмассового поля спина  $s$ , и  $q_1, q_2$  — свободные параметры приближения Фролова-Зельникова. Уравнения (14), (15) совпадают, если выполняются условия  $q_2 = 0$ ,  $2(\alpha + q_1) = \alpha$ . При этом остается только одно уравнение для функции  $r(l)$ , которое после соответствующих вычислений принимает вид дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$-2\frac{r''}{r} - \frac{r'^2 - 1}{r^2} = \frac{16\pi\alpha}{3} \left( 2\frac{r''''}{r} + 2\frac{r''''r'}{r^2} - 4\frac{r''r'^2}{r^3} - \frac{r''^2}{r^2} + \frac{r'^4}{r^4} - \frac{1}{r^4} \right). \quad (16)$$

В статическом сферически симметричном случае система уравнений Эйнштейна (12) содержит еще одно нетривиальное уравнение  $G_{ll} = 8\pi T_{ll}$ , которое является дифференциальным уравнением третьего порядка и выполняет роль дополнительной связи, накладываемой на решения уравнения (16). Полностью функция  $r(l)$  может быть получена численно как решение уравнения (16). Результаты численного анализа приведены на рис. 6. Найденное решение описывает кротовую нору с радиусом горловины  $r_0 = (16\pi\alpha/3)^{1/2} L_p$ , где  $L_p = (G\hbar/c^3)^{1/2}$  — планковская длина. Таким образом, радиус горловины полуклассической кротовой норы пропорционален планковской длине с коэффициентом пропорциональности  $(16\pi\alpha/3)^{1/2}$ . Константа  $\alpha$  определяется полным числом спиральностей квантованных полей теории. В частности, для радиуса горловины (в единицах  $L_p$ ) в случаях безмассового скалярного, спинорного и векторного полей имеем:

спин поля $s$	0	1/2	1
радиус горловины $r_0/L_p$	0,03	0,05	0,1

Простым следствием этой теоремы служит утверждение, что теория с действием (2) не содержит кротовых нор при  $\xi \leq 0$ . В случае  $\xi > 0$  функция  $f(\phi)$  обращается в нуль, если  $|\phi| = (8\pi\xi)^{-1/2}$ . Для этого случая можно доказать еще одну теорему несуществования.

**Теорема 2.** Система динамических уравнений теории с действием (2) не допускает решений с кротовыми норами, если функция  $f(\phi)$  имеет четное количество нулей в области изменения радиальной координаты  $\rho$ .

Таким образом, для существования кротовых нор в теории с действием (2) необходимо выполнение следующих условий: I)  $\xi > 0$ ; II)  $f(\phi)$  имеет нечетное количество нулей. Следует отметить, что хотя в нуле функции  $f(\phi)$  фактор  $1/f(\phi)$  в формуле (11) становится сингулярным, при определенных условиях метрика  $g_{\mu\nu}$  остается регулярной. (Значения  $\rho$ , для которых фактор  $1/f(\phi)$  является сингулярным, соответствуют поверхностям перехода, введенным в рассмотрение Бронниковым.<sup>14</sup>)

Решение динамической системы уравнений было построено численно для потенциала  $V$  вида

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left[ (\phi - \bar{\phi})^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right]^2,$$

где  $\lambda > 0$ ,  $m > 0$ ,  $\bar{\phi}$  — некоторые константы. Минимумы потенциала, расположенные в точках  $\phi_1 = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} + \bar{\phi}$ ,  $\phi_2 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} + \bar{\phi}$ , соответствуют двум вакуумам скалярного поля.

На рисунке 4 приведен пример решения, описывающего кротовую нору. В данном примере горловина кротовой норы соответствует минимуму функции  $r(x)$ , который достигается в точке  $x_* \approx 3.52$  и равен  $r_* = \min\{r(x)\} \approx 0.9484$ . Значение

скалярного поля  $\eta$  плавно меняется от  $\eta_1$  при  $x = -\infty$  до  $\eta_2$  при  $x = \infty$ . Это означает, что скалярное поле находится в разных вакуумных состояниях по разные стороны горловины кротовой норы. Энергия скалярного

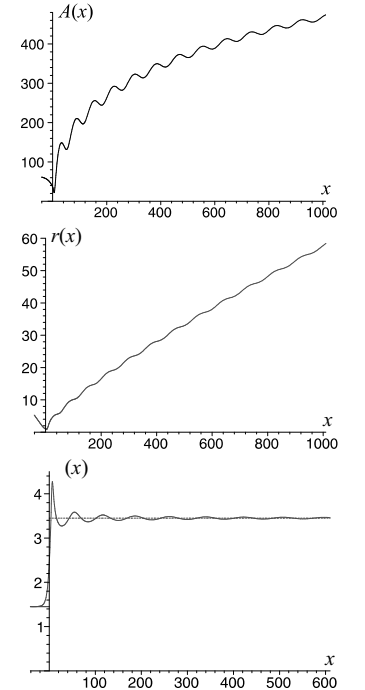


Рис. 4. Численные решения для метрических функций  $A(x)$ ,  $r(x)$  и скалярного поля  $\eta(x)$ , где  $x = m\rho$ ,  $\eta(x) = \phi(\rho)(\sqrt{\lambda}/m)$ .

<sup>14</sup>Bronnikov K. A. *Scalar-tensor gravity and conformal continuations* // J. Math. Phys.—2002.—V.43.—P.6096-6115.

поля при этом близка к нулю вдали от горловины и имеет пик в узкой области вблизи горловины. Такая конфигурация поля соответствует сферической доменной стенке, локализованной в горловине кротовой норы.

В **Параграфе 2.5** детально исследуются свойства доменных стенок в пространстве-времени кротовой норы. Доменные стенки представляют из себя полевые конфигурации с нетривиальными топологическими граничными условиями, которые требуют существенного изменения поля в некотором характерном пространственном масштабе.

Рассмотрим скалярное поле  $\phi$  на фоне пространства-времени кротовой норы с метрикой вида

$$ds^2 = -e^{2\beta(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (11)$$

Лагранжиан скалярного поля имеет вид  $\mathcal{L} = -\phi^{;\mu}\phi_{;\mu} - 2V(\phi) - \xi R\phi^2$ , где  $\xi$  — параметр связи со скалярной кривизной  $R$ ,  $V$  — потенциал хиггсовского типа, приводящий к нарушению дискретной симметрии:  $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - m^2/\lambda)^2$ . Уравнение движения скалярного поля в пространстве-времени с метрикой (11) принимает вид

$$\eta'' + (\beta' + 2\alpha'/\alpha)\eta' - \eta^3 + \eta - \xi R\eta = 0,$$

где введены безразмерные величины  $\rho \equiv ml$ ,  $\eta \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi$ ,  $\alpha \equiv mr$  и штрих означает производную относительно  $\rho$ .

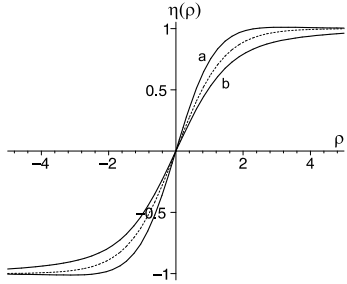


Рис. 5. Семейство графиков функции  $\eta(\rho)$ ;  $\xi = 1/6$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\lambda_0 = 2$  для кривой  $a$ , и  $\lambda_0 = 10$  для кривой  $b$ .

Решения уравнения движения скалярного поля, соответствующие конфигурации доменной стенки, должны удовлетворять граничным условиям вида  $\eta(\pm\infty) = \pm 1$ . Такие решения получены при некоторых дополнительных ограничениях на метрические функции  $\alpha$  и  $\beta$ . А именно, предполагается, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются медленно меняющимися функциями, и безразмерный радиус горловины  $\alpha_0$  является большой величиной:  $\alpha_0^{-2} \ll 0$ . Более точно, предполагается, что  $n$ -е производные  $\alpha$  и  $\beta$  имеют порядок  $\epsilon^n$ , а  $\alpha_0^{-1}$  имеет порядок  $\epsilon$ , где  $\epsilon$  — малый параметр. При таких предположениях решение уравнения движения скалярного поля строится как разложение по порядкам малости  $\epsilon^2$ :  $\eta(\rho) = \eta_0(\rho) + \sum_n \delta^{(n)}(\rho)$ . В качестве функции, задающей приближение нулевого порядка, выбирается

функция  $\eta_0(\rho) = \text{th}(\rho/\sqrt{2})$  (так называемый *кинн*), которая является решением уравнения  $\eta'' - \eta^3 + \eta = 0$ . Поправки  $\delta^{(n)}$  следующих порядков  $\epsilon^{2n}$  находятся с помощью итерационной процедуры. Например, для  $\delta^{(1)}$  получается следующее выражение:

$$\delta^{(1)}(\rho) = -\delta_2(\rho) \int_\rho^\infty \delta_1(\zeta) j(\zeta) d\zeta - \delta_1(\rho) \int_0^\rho \delta_2(\zeta) j(\zeta) d\zeta,$$

$$\text{где } j(\rho) = -\left(\beta' + 2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\eta'_0 + \xi R\eta_0, \quad \delta_1(\rho) = \eta'_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sech}^2\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\delta_2(\rho) = \frac{1}{4} \left[ \text{sh}\left(\sqrt{2}\rho\right) + 3 \text{th}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3\rho}{\sqrt{2}} \text{sech}^2\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Приближенное решение  $\eta = \eta_0 + \delta^{(1)}$  анализируется для конкретной модели кротовой норы с функциями  $\alpha$  и  $\beta$  вида  $\beta(\rho) \equiv 1$ ,  $\alpha(\rho) = \rho \text{cth} \frac{\rho}{\lambda_0} - \lambda_0 + \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  и  $\lambda_0$  — безразмерные модельные параметры, характеризующие радиус и длину горловины кротовой норы. Примеры решений приведены на рис. 5.

**3. В третьей главе** изучаются различные аспекты поведения квантованных полей в пространстве-времени кротовой норы и затрагиваются некоторые связанные с этим проблемы.

**Параграф 3.1** носит вводный характер.

**Параграф 3.2** посвящен построению самосогласованного полуклассического решения, описывающего кротовую нору в общей теории относительности, где в качестве источника гравитации выступает вакуум квантованных полей. Полуклассические уравнения Эйнштейна имеют следующий вид:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle^{\text{ren}}, \quad (12)$$

где  $G_{\mu\nu}$  — тензор Эйнштейна,  $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle^{\text{ren}}$  — перенормированное среднее значение оператора тензора энергии-импульса, построенное для некоторого квантового состояния  $|\psi\rangle$ . Величина  $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle^{\text{ren}}$  является сложным функционалом метрики, и ее вычисление в общем случае представляет собой трудноразрешимую задачу. Для преодоления этой проблемы развиты различные приближенные методы вычисления квантовых средних величин. В диссертационной работе используется приближение, построенное Фроловым и Зельниковым<sup>15</sup> для перенормированного вакуумного

<sup>15</sup>Frolov V. P., Zel'nikov A. I. *Killing approximation for vacuum and thermal stress-energy tensor in static space-times* // Physical Review D.—1987.—V.35.—P.3031-3044.

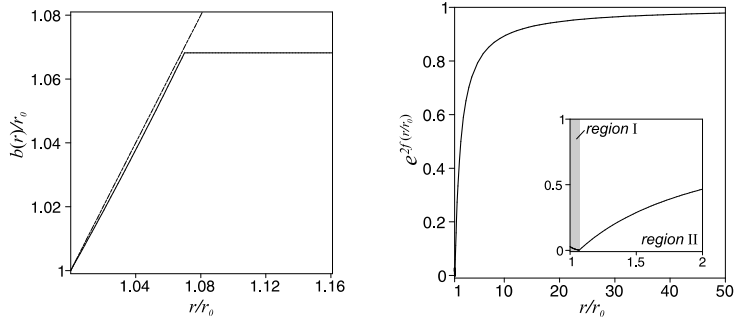


Рис. 3. График функции  $b(r)/r_0$  (слева). Пунктиром показана прямая  $r/r_0$ . График функции  $e^{2\Phi(r/r_0)}$  (справа). Полоса отмечает область, содержащую темную энергию.

$V_\phi = 0$  (уравнение движения скалярного поля) и  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$  (уравнения Эйнштейна), здесь  $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$  — эффективный тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = \frac{1}{f(\phi)} \left\{ \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 - 2\xi [\nabla_\mu (\phi \nabla_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\phi \nabla_\lambda \phi)] - g_{\mu\nu} V(\phi) \right\},$$

где  $f(\phi) = 1 - 8\pi\xi\phi^2$ . Решение строится в классе статических сферически-симметричных метрик:

$$ds^2 = -A(\rho)dt^2 + A^{-1}(\rho)d\rho^2 + r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где  $\rho \in (-\infty, \infty)$ . Неизвестными функциями являются метрические функции  $A(\rho)$ ,  $r(\rho)$  и скалярное поле  $\phi(\rho)$ . Уравнения гравитационного и скалярного полей образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которая не может быть решена аналитически и требует применения численных методов для своего изучения. Однако, некоторые общие свойства этой системы могут быть получены аналитическими методами. Существенную роль в таком анализе играет функция  $f(\phi) = 1 - 8\pi\xi\phi^2$ , чье поведение определяется параметрами  $\xi$ ,  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . В частности, имеет место следующая теорема несуществования.

**Теорема 1.** Система динамических уравнений теории с действием (2) не допускает решений с кротовыми норами, если функция  $f(\phi)$  отлична от нуля во всей области изменения радиальной координаты  $\rho$ .

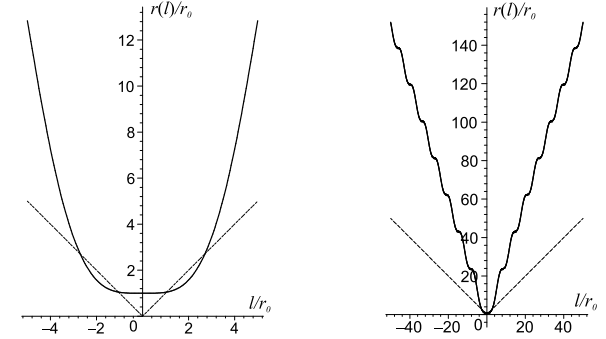


Рис. 6. График функции  $r(l)$  в большом (слева) и малом (справа) масштабах. Функция  $r(l)$  описывает кротовую нору с горловиной, расположенной в точке  $l = 0$  и имеющей радиус  $r_0 = (16\pi\alpha/3)^{1/2}$ .

В параграфе 3.3 вычисляется энергия нулевых колебаний скалярного массивного поля в пространстве-времени кротовой норы. Провести вычисления до конца удастся в идеализированной модели кротовой норы, обладающей бесконечно короткой горловиной. Подобная модель конструируется следующим образом. Выбираются две копии пространства Минковского,  $\mathcal{M}_+$  и  $\mathcal{M}_-$ , в сферической системе координат  $(t, r_\pm, \theta_\pm, \varphi_\pm)$ . Далее в каждом пространстве вырезается сферическая область  $r_\pm < a$ , где  $a$  — радиус сферы, и затем границы двух областей отождествляются:  $(t, a, \theta_+, \varphi_+) \leftrightarrow (t, a, \theta_-, \varphi_-)$ . Геометрия такой идеализированной кротовой норы описывается метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (17)$$

где  $\rho$  — собственное радиальное расстояние,  $-\infty < \rho < \infty$  и функция  $r(\rho)$  имеет вид  $r(\rho) = |\rho| + a$ ,  $a > 0$ . Тензор Римана для этой модели тождественно равен нулю всюду кроме горловины кротовой норы ( $\rho = 0$ ), где происходит склейка пространств. В частности, прямое вычисление дает следующее выражение для скалярной кривизны:  $R(\rho) = -8a^{-1}\delta(\rho)$ .

Скалярное поле  $\phi$  с массой  $m$  описывается уравнением движения  $(\square - m^2 - \xi R)\phi = 0$ , где  $\xi$  — константа неминимальной связи с кривизной. Для метрики (17) решение уравнения поля имеет вид  $\phi(t, \rho, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} u(\rho) Y_{ln}(\theta, \varphi)$ , где  $Y_{ln}(\theta, \varphi)$  — сферические функции,  $l = 0, 1, \dots$  и  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , и функция  $u(\rho)$  удовлетворяет уравнению

$$u'' + 2\frac{r'}{r}u' + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 - \xi R\right)u = 0,$$

где штрих означает производную  $d/d\rho$ . Решения этого уравнения образуют спектр значений  $\lambda = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ ,  $|\omega| > m$ . Энергия нулевых колебаний вакуума скалярного поля, соответствующих данному спектру, имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (2l+1) (\lambda_{lj}^{(\alpha)^2} + m^2)^{1/2}.$$

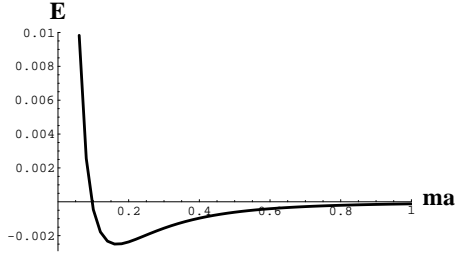


Рис. 7. Энергия нулевых колебаний  $E = E^{ren}/m$  в зависимости от безразмерного параметра  $ma$  для фиксированной массы  $m$  и  $\xi = \frac{1}{6}$ . Энергия имеет минимум в точке  $ma \approx 0.16$ .

Окончательный анализ перенормированного выражения для энергии нулевых колебаний выполнен численно. Результат численного анализа представлен на рис. 7.

В параграфе 3.4 рассматривается квантованное массивное скалярное поле  $\phi$  в пространстве-времени статической сферически симметричной кротовой норы и разрабатывается метод построения приближенных выражений для таких вакуумных средних величин, как  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  (поляризация вакуума) и  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$  (вакуумный тензор энергии-импульса).

Метрика кротовой норы выбирается в виде

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (18)$$

где метрические функции  $f(r)$  и  $h(r)$  удовлетворяют требованиям, предъявляемым к кротовым норам. Скалярное поле подчиняется уравнению  $(\square - m^2 - \xi R)\phi = 0$ . Евклидова функция Грина  $G_E(x, \tilde{x})$  для этого урав-

нения статической сферически симметричной кротовой норы выбирается в виде:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2], \quad (7)$$

где  $r \in [r_0, \infty)$ , функция  $\Phi(r)$  всюду ограничена и функция  $b(r)$  подчиняется условиям горловины, которые в данном случае принимают вид  $b(r_0) = r_0$ ,  $b'(r_0) < 1$ ,  $b(r) < r$ . Уравнения Эйнштейна  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , записанные для метрики (7), приводятся к следующему виду:

$$b' = 8\pi\rho r^2; \quad \Phi' = \frac{8\pi p r^3 + b}{2r(r - b)}, \quad (8)$$

где  $\rho$  — плотность энергии,  $p$  — радиальное давление. Для поперечного давления  $p_\perp$  из закона сохранения  $T_{\beta;\alpha} = 0$  следует уравнение

$$p_\perp = p + \frac{1}{2} r\Phi'(\rho + p) + \frac{1}{2} rp'. \quad (9)$$

Вместе с уравнением состояния  $p = w\rho$  уравнения (8), (9) образуют систему, состоящую из четырех уравнений для пяти неизвестных функций  $\Phi$ ,  $b$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $p_\perp$ . Одна из пяти функций является свободной и задается, исходя из дополнительных соображений. В частности, мы рассматриваем различные модели пространственного распределения плотности темной энергии  $\rho(r)$ . В наиболее простом случае темная энергия равномерно распределена в ограниченной сферической области вблизи горловины:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r_0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r > r_1, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\rho_0$  — некоторая константа,  $r_1$  — размер области. Такому распределению плотности темной энергии соответствует решение системы уравнений (8)-(9), описывающее кротовую нору (см. рис. 3).

Параграф 2.4 посвящен построению и исследованию кротовых нор в теории гравитации с обыкновенным скалярным полем  $\phi$ , неминимальным образом связанным с гравитационным полем.

Действие теории выбирается в виде (2). Предполагается, что потенциал скалярного поля  $V(\phi)$  имеет хиггсовскую форму, т.е. имеет два минимума при  $\phi = \phi_1$  и  $\phi = \phi_2$ , причем  $V(\phi_1) = 0$ ,  $V(\phi_2) = 0$ . Динамические уравнения теории с действием (2) имеют следующий вид:  $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi - \xi R\phi -$

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. **Первая глава** диссертации носит вводный характер. Она содержит ряд необходимых предварительных сведений, касающихся различных аспектов физики кротовых нор. В том числе здесь рассматриваются общие свойства геометрии пространства-времени кротовых нор и приводится вывод некоторых формул, используемых в последующем изложении. Кроме того, в первой главе рассматриваются основные этапы истории изучения кротовых нор и дается обзор основных направлений исследований, посвященных кротовым норам и смежным проблемам.

2. **Во второй главе** строится и изучается ряд моделей, допускающих существование кротовых нор в рамках общей теории относительности с классическими материальными полями, а также проводится исследование нетривиальной топологической полевой конфигурации (доменной стенки) в пространстве-времени кротовой норы.

**Параграф 2.1** является вводным. Здесь приводится краткий обзор некоторых известных моделей классических источников гравитационного поля, порождающих кротовые норы.

Исторически первое решение, описывающее статическую сферически симметричную кротовую нору, было получено независимо Эллисом<sup>9</sup> и Бронниковым<sup>10</sup> в теории гравитации с фантомным скалярным полем, т.е. скалярным полем с отрицательной кинетической энергией. Простейшая теория такого рода описывается действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{8\pi} R + g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi) \right\}, \quad (1)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — метрика,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $R$  — скалярная кривизна,  $\phi$  — скалярное поле, и  $V(\phi)$  — потенциал. Аномальное поведение кинетической энергии приводит к нарушению энергетических условий и обеспечивает, тем самым, возможность существования кротовых нор.

Скалярное поле с положительной кинетической энергией также способно обеспечить существование кротовых нор в эйнштейновской теории гравитации. В этом случае действие можно представить следующим образом:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{8\pi} R - g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi) - \xi R \phi^2 \right\}, \quad (2)$$

<sup>9</sup>Ellis H. G. *Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity* // Journal of Mathematical Physics.—1973.—V.14.—P.104-118.

<sup>10</sup>Bronnikov K. A. *Scalar-Tensor theory and scalar charge* // Acta Physica Polonica B.—1973.—V.4.—P.251-266.

$\mathcal{L} = -g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu}$ , инвариантным относительно действия фундаментальной группы  $\Gamma$  в том случае, когда скалярное поле подчиняется обобщенному периодическому условию  $\phi(\gamma X) = e^{2\pi i \alpha} \phi(X)$ , где  $\alpha$  — действительный параметр:  $\alpha \in [0, 1/2]$ . Это условие называется условием автоморфности, а  $\alpha$  — параметром автоморфности.

Лагранжиану  $\mathcal{L}$  соответствует уравнение поля  $\square \phi = 0$ . В изотропных координатах  $\zeta_{\pm} \equiv W u_{\pm} = \xi \pm \eta$  оно принимает вид  $\partial_{+-} \phi = 0$ , где  $\partial_{+-} = \partial_+ \partial_-$  и  $\partial_{\pm} = \partial / \partial \zeta_{\pm}$ . Полный ортонормированный набор  $\{u_n\}$  положительно-частотных решений уравнения поля, удовлетворяющих условию автоморфности, образован функциями

$$u_n = b_n \left[ e^{\pi^2 \beta (n+\alpha)} (\zeta_+ - i0)^{-2\pi i \beta (n+\alpha)} - e^{-\pi^2 \beta (n+\alpha)} (\zeta_- + i0)^{-2\pi i \beta (n+\alpha)} \right],$$

где  $\beta = (WL)^{-1}$ ,  $\chi = 2\pi^2 \beta$ ,  $b_n = [8\pi(n+\alpha) \text{sh}(\chi(n+\alpha))]^{-1/2}$ . Этому набору решений соответствует перенормированный тензор энергии-импульса автоморфного комплексного скалярного поля:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_M^{\text{ren}} = \left( \frac{1}{\zeta_+^2} \delta_{\mu}^+ \delta_{\nu}^+ + \frac{1}{\zeta_-^2} \delta_{\mu}^- \delta_{\nu}^- \right) F_{\alpha}(\beta) - \frac{1}{12\pi} g_{\mu\nu},$$

где  $F_{\alpha}(\beta) = -(4\pi)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n \alpha}{\text{sh}^2(n/2\beta)}$ . Поведение тензора энергии-импульса определяется поведением функции  $F_{\alpha}(\beta)$ , график которой показан на рис. 9. Можно выделить два качественно различных случая. В первом случае, когда  $\alpha < \alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}$ , функция  $F_{\alpha}(\beta)$  отрицательна для всех  $\beta > 0$ . При этом вблизи хронологического горизонта, например, вблизи  $H_+$ :  $\zeta_+ = 0$  выражение для тензора энергии-импульса принимает вид  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_M^{\text{ren}} = F_{\alpha}(\beta) \delta_{\mu}^+ \delta_{\nu}^+ / u_+^2$ , что свидетельствует о существовании вблизи  $H_+$  неограниченно возрастающего потока плотности энергии. Во втором случае, когда  $\alpha > \alpha_0$ , функция  $F_{\alpha}(\beta)$  является знакопеременной и обращается в нуль при некотором значении параметра  $\beta = \beta_*$ . В этом случае тензор энергии-импульса  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_M^{\text{ren}} = -g_{\mu\nu} / 12\pi$  регулярен на хронологическом горизонте.

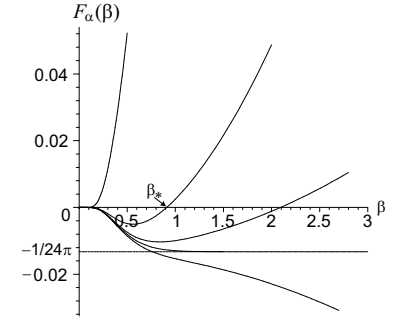


Рис. 9. График функции  $F_{\alpha}(\beta)$ . Кривая (а) получена для  $\alpha < \alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}$ ; кривая (б) получена для  $\alpha = \alpha_0$ ; кривые (с), (д) получены для  $\alpha_0 < \alpha$ ; и кривая (е) соответствует значению  $\alpha = 1/2$ .

В параграфе 4.3 изучается комплексное скалярное поле в пространстве Мизнера, метрика которого в координатах Мизнера  $(t, x^1, x^2, x^3)$  имеет вид<sup>18</sup>

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

В новых координатах  $y^0 = t \operatorname{ch}(x^1)$ ,  $y^1 = t \operatorname{sh}(x^1)$ ,  $y^2 = x^2$ ,  $y^3 = x^3$  эта метрика совпадает с метрикой Минковского  $ds^2 = -(dy^0)^2 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$ . Специфические свойства пространства Мизнера заключаются в его топологии и определяются следующим правилом отождествления:  $(t, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (t, x^1 + na, x^2, x^3)$ . В координатах  $\{y^\mu\}$  это правило принимает форму  $(y^0, y^1, y^2, y^3) \leftrightarrow (y^0 \operatorname{ch}(na) + y^1 \operatorname{sh}(na), y^0 \operatorname{sh}(na) + y^1 \operatorname{ch}(na), y^2, y^3)$ . Подобная топологическая структура приводит к существованию в пространстве Мизнера областей, содержащих замкнутые времениподобные мировые линии. При этом поверхность  $t = 0$  является хронологическим горизонтом.

Комплексное безмассовое скалярное поле  $\phi$  описывается уравнением  $\square\phi = 0$  и удовлетворяет условию автоморфности:  $\phi(t, x^1 + a, x^2, x^3) = e^{2\pi i \alpha} \phi(t, x^1, x^2, x^3)$ . Полный ортонормированный набор положительно-частотных автоморфных решений уравнения поля имеет вид

$$\phi_J(t, x^1, x^2, x^3) = \frac{e^{\pi\nu/2}}{4(\pi a)^{1/2}} H_{i\nu}^{(2)}(\kappa t) e^{i(\nu x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3)}, \quad (19)$$

где  $H_\mu^{(2)}(z)$  — функция Ханкеля 2-ого рода,  $\nu = -2\pi a^{-1}(n + \alpha)$ ,  $\kappa = [(k_2)^2 + (k_3)^2]^{1/2}$ , и  $J$  — мультииндекс  $\{n, k_2, k_3\}$ . Перенормированное вакуумное среднее значение тензора энергии-импульса, вычисленное для решений (19), может быть представлено следующим образом:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{ren} = \frac{1}{t^4} \operatorname{diag}(L, 3L, M, M),$$

$$\text{где } L = \pi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-n^3}{3} - \frac{3\xi n}{2} \right) \Psi_n, \quad M = \pi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+n^3}{3} - \frac{9\xi n}{2} \right) \Psi_n,$$

$$\Psi_n(a, \alpha) = \frac{e^{na} \cos 2\pi\alpha - 1}{e^{2na} - 2e^{na} \cos 2\pi\alpha + 1}.$$

Важная особенность в поведении полученного тензора энергии-импульса заключается в том, что его компоненты, вообще говоря, обращаются в бесконечность на хронологическом горизонте  $t = 0$ , что указывает на квантовую неустойчивость хронологического горизонта. В то же время

<sup>18</sup>Хокинг С., Эллис Дж., *Крупномасштабная структура пространства-времени.*— М.: Мир—1977.—432 с.

2000); Международная конференция “Gravitation, Cosmology and Relativistic Astrophysics” (Украина, Харьков, 2000); IV международное рабочее совещание “Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions” (Германия, Лейпциг, 1998); IV международный семинар им. А.А. Фридмана “Gravitation and Cosmology” (Санкт-Петербург, 1998); 15th International Conference on General Relativity and Gravitation (Pune, India, December, 1997); 1 Международная школа-семинар “Современные проблемы космологии” (Ульяновск, сентябрь, 1997); III Международная конференция “Геометризация физики” (Казань, октябрь, 1997); Международный геометрический семинар “Современная геометрия и теория физических полей” (Казань, февраль, 1997); 9 Российская гравитационная конференция “Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации” (Новгород, 1996); III международное рабочее совещание “Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions”, (Германия, Лейпциг, 1995); II семинар “Gravitational Energy and Gravitational Waves” (Дубна, 1990); Конференция “Материальные среды в релятивистских полях тяготения” (Казань, 1989), а также на научных семинарах Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга МГУ, Российского гравитационного общества (Центр гравитации и фундаментальной метрологии ВНИИМС), кафедры теоретической и математической физики Ульяновского государственного университета, кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета, кафедр геометрии и теоретической физики Казанского государственного педагогического университета, кафедры теоретической физики университета Эдмонта (Канада), кафедры теоретической физики университета Сеула (Корея), теоретического отдела Института теоретической физики (Пекин, Китай).

## Публикации

По теме диссертации опубликовано двадцать шесть статей в центральной (ТМФ, ЯФ, Gravitation & Cosmology [Гравитация и космология]) и зарубежной (Physical Review Letters, Physical Review D, Classical and Quantum Gravity, General Relativity and Gravitation, Physics Letters A, International Journal of Modern Physics) печати.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка литературы и приложения.

горла). Энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля с константой связи  $\xi$ , вычисленная с помощью метода дзета-функции, принимает минимальное значение для определенного радиуса горловины кротовой норы, соответствующего равновесной конфигурации. В частности, для  $\xi = 1/6$  (конформная связь) радиус горловины стабильной полуклассической кротовой норы имеет значение  $a \approx 0.0141 L_p$ , где  $L_p$  — планковская длина.

6. Предложен метод построения аналитических приближенных выражений для поляризации вакуума  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  и вакуумного тензора энергии-импульса  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$  массивного скалярного поля  $\phi$ , основанный на использовании ВКБ-приближения для мод скалярного поля и адаптированный для вычислений в пространстве-времени кротовой норы.

7. Приближенные методы, нацеленные на вычисление вакуумных средних величин и использующие в своей основе приближение ВКБ, приводят к неверным результатам на горизонте событий черной дыры для полей, не обладающих конформной инвариантностью. Причиной этому является важная роль, которую играют низкочастотные моды вблизи горизонта событий. Для решения этой проблемы построено новое однородное приближение, более точно учитывающее вклад низкочастотных (включая нулевую) мод и приводящее к хорошим результатам как вдали, так и вблизи от горизонта событий.

8. Квантованное автоморфное скалярное поле дает пример регулярного поведения на хронологическом горизонте (в двумерной модели и 4-мерном пространстве Мизнера). Тензор энергии-импульса, вычисленный для такого поля, остается регулярным на хронологическом горизонте при определенных значениях параметра автоморфности.

9. Формирование хронологического горизонта сопровождается рождением частиц квантованного скалярного поля. При этом число частиц, рожденных в каждой моде, так же как и полное число частиц остаются конечными в момент формирования горизонта. Этот результат указывает на то, что процесс рождения частиц не может препятствовать образованию хронологического горизонта.

10. Математическое требование полноты набора решений волнового уравнения, возведенное в физический принцип, позволяет успешно решить ряд проблем, связанных с построением квантовой теории поля в пространствах с замкнутыми времениподобными линиями. В частности, на основе принципа полноты оказывается возможным построение модифицированной процедуры квантования. Прямые вычисления функции Адамара и поляризации вакуума  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  для скалярного поля  $\phi$ , выполненные с использованием данной процедуры в двумерной модели с

$A_n\phi_n^{(+,out)} + B_n\phi_n^{*(-,out)}$ , где  $A_n$  и  $B_n$  — коэффициенты Боголюбова:

$$A_n = (-\beta)^{-i\mu\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(r-q)}{\beta^{1/2}\Gamma(r)\Gamma(s-q)}, \quad B_n = (-\beta)^{i\mu\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(q-r)}{\beta^{1/2}\Gamma(q)\Gamma(s-r)}.$$

Величина  $\langle N_n \rangle = |B_n|^2$  определяет число частиц, рожденных в моде  $n$ . Выражение для  $\langle N_n \rangle$  имеет вид

$$\langle N_n \rangle = \frac{\text{ch } \frac{\pi\omega(1-\beta)}{\gamma\beta} + \text{ch } \pi\sqrt{\left(\frac{\omega(1-\beta)}{\gamma\beta}\right)^2 - 1}}{2 \text{sh } \frac{\pi\omega}{\gamma} \text{sh } \frac{\pi\omega}{\gamma\beta}}.$$

Переход к пределу  $a_0 \rightarrow 1$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) соответствует появлению хронологического горизонта в бесконечно удаленном будущем. В этом пределе спектр рожденных частиц определяется равенством  $\langle N_n \rangle = \text{sh}^{-1}(\pi\omega/\gamma)$ . Таким образом, число частиц, рожденных в моде  $n$ , а также полное число рожденных частиц  $N = \sum_n \langle N_n \rangle$  остаются конечными при приближении к хронологическому горизонту.

**Параграф 4.4** посвящен анализу проблем, возникающих при использовании стандартного подхода к процедуре квантования полей в пространствах с замкнутыми времениподобными линиями. Показано, что в данном случае стандартная схема канонического квантования оказывается неприменимой. Причиной этого служит тот факт, что в пространстве с замкнутыми времениподобными линиями нельзя построить набор  $\{\phi_n, \phi_n^*\}$  положительно- и отрицательно-частотных мод, который был бы полным на некоторой *пространственноподобной* гиперповерхности  $\Sigma$ . Поэтому, в частности, оператор  $\phi$  нельзя представить в виде разложения по обычным операторам рождения и уничтожения и, следовательно, нельзя дать естественного определения вакуумного состояния  $|0\rangle$ .

Для решения указанной проблемы была предложена модифицированная процедура квантования, в основу которой заложено требование полноты набора решений уравнения поля. Такой подход был применен для вычисления перенормированного вакуумного среднего значения квадрата оператора скалярного поля  $\langle 0|\phi^2|0\rangle$  на четырехмерном времениподобном цилиндре  $S_4$ , содержащем замкнутые времениподобные мировые линии. (Пространство  $S_4$  может быть представлено как факторпространство  $M/\mathcal{R}$ , где  $M$  — пространство Минковского с метрикой  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  и  $\mathcal{R}$  — отношение эквивалентности  $(t+a, x, y, z) \equiv (t, x, y, z)$ .) При этом был найден полный ортонормированный набор решений уравнения скалярного поля  $\square\phi = 0$  и построена функция Адамара

$$G^{(1)}(X, X') = -\frac{1}{4\pi a \Delta r} \left[ \frac{\sin \frac{2\pi\Delta(t-r)}{a}}{1 - \cos \frac{2\pi\Delta(t-r)}{a}} - \frac{\sin \frac{2\pi\Delta(t+r)}{a}}{1 - \cos \frac{2\pi\Delta(t+r)}{a}} \right],$$

где  $\Delta X = X - X'$ . Для перенормированного вакуумного среднего значения для квадрата полевого оператора  $\langle 0|\phi^2|0\rangle = \frac{1}{2} \lim_{X' \rightarrow X} G^{(1)\text{ren}}(X, X')$ , характеризующего вакуумные флуктуации на  $\mathcal{S}_4$ , имеем

$$\langle 0|\phi^2|0\rangle = -\frac{1}{12a^2}.$$

Показано, что полученный с помощью модифицированной схемы квантования результат согласуется с другими подходами к этой проблеме, включая метод изображений и евклидов подход.

## Основные результаты и выводы

Основные результаты и выводы диссертационной работы сводятся к следующим:

1. В рамках общей теории относительности с фантомным скалярным полем, выступающим в роли источника гравитации, найден и детально изучен класс решений, описывающих *нестатические* сферически симметричные кротовые норы, соединяющие две однородные, пространственно плоские, расширяющиеся с ускорением вселенные. Показано, что характер ускорения определяется параметром, характеризующим асимптотическую массу кротовой норы. В случае, когда масса кротовой норы равна нулю, ускорение постоянно; при этом кротовая нора связывает две вселенные Де Ситтера. Иначе ускорение является бесконечно возрастающим; в этом случае кротовая нора соединяет две однородные пространственно плоские вселенные, расширяющиеся с возрастающим ускорением вплоть до финального сингулярного состояния, получившего название Большой Разрыв (Big Rip). Следует также отметить, что радиус горловины кротовой норы растет с тем же ускорением. Это свойство можно положить в основу механизма, обеспечивающего рост первичных кротовых нор (т.е. кротовых нор, имеющих планковские размеры и составляющих пространственно-временную пену) до макроскопических размеров.

2. Показано, что темная энергия с уравнением состояния  $p = w\rho$ , где  $w < -1$  (фантомная энергия), доминирующая в ускоряющейся Вселенной, способна обеспечивать существование кротовых нор. Построены решения уравнений Эйнштейна с источником в виде фантомной энергии, описывающие статические сферически симметричные кротовые норы. Полученные решения выявили важную особенность, связанную с распределением фантомной энергии в пространстве кротовой норы, которая оказалась заключенной в ограниченной сферической области, окружающей горловину кротовой норы.

циальным потенциалом в рамках общей теории относительности обеспечивает существование динамической сферически-симметричной пространственно-временной конфигурации, представляющей собой кротовую нору, связывающую две асимптотически однородные пространственно плоские вселенные, расширяющиеся с ускорением. Характер ускорения зависит от параметра, определяющего массу кротовой норы. В случае нулевой массы величина ускорения является постоянной; для массы, отличной от нуля, величина ускорения возрастает до бесконечности за конечный промежуток времени. Первый случай соответствует двум вселенным Де Ситтера, соединенным кротовой норой. Во втором случае кротовая нора соединяет две однородные пространственно плоские вселенные, расширяющиеся с возрастающим ускорением вплоть до финального сингулярного состояния, получившего название Большой Разрыв (Big Rip).

2. Темная энергия, которая согласно последним астрофизическим наблюдениям доминирует (составляет  $\sim 73\%$ ) в современной ускоряющейся Вселенной, способна приводить к формированию и существованию статических сферически симметричных кротовых нор. Это возможно для фантомной темной энергии с уравнением состояния  $p = w\rho$ , где  $w < -1$ . Распределение фантомной энергии в пространстве кротовой норы имеет следующую важную особенность: большая ее часть оказывается заключенной в ограниченной сферической области, окружающей горловину кротовой норы; максимальный размер этой области ограничен и определяется параметром  $w$ .

3. В рамках эйнштейновской теории гравитации со скалярным полем, неминимально связанным с кривизной и имеющим потенциал хиггсовского типа с двумя минимумами (что приводит к нарушению дискретной симметрии), реализуются решения, описывающие статические сферически симметричные кротовые норы. Распределение скалярного поля на фоне подобной кротовой норы представляет собой особую топологическую конфигурацию, соответствующую сферической доменной стенке, локализованной вблизи горловины.

4. Кротовые норы реализуются как самосогласованные решения полуклассической теории гравитации с вакуумом квантованных полей. Особенность полуклассических кротовых нор состоит в том, что характерный масштаб горловины такой кротовой норы сравним с планковской длиной.

5. Возможность существования полуклассических кротовых нор подтверждается исследованиями энергии нулевых колебаний массивного скалярного поля в пространстве-времени кротовой норы (модель короткого



лась геометродинамика Уилера,<sup>4</sup> основанная на представлении о многосвязном пространстве.

Топологическая ручка в многосвязном пространстве получила название “wormhole” или “кротовая нора”. Идеи Уилера о роли топологии в гравитации оказали глубокое влияние на физические представления о структуре пространства-времени. Понятия о кротовых норах и пространственно-временной пене прочно вошли в физический лексикон и мышление. Новый всплеск инте-

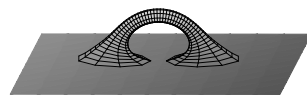


Рис. 2. Топологическая ручка (кротовая нора), соединяющая удаленные области “вселенной”.

реса к кротовым норам был вызван работами Морриса и Торна,<sup>5</sup> которые ввели понятие проходимой кротовой норы и показали, что существование таких объектов неизбежно приводит к формированию в пространстве-времени замкнутых времениподобных мировых линий, т.е. к образованию “машины времени”. Полученные ими результаты повлекли за собой активную деятельность, охватывающую широкий спектр проблем, связанных с кротовыми норами и машиной времени.

Центральная проблема физики кротовых нор связана с тем, что их существование должно поддерживаться “экзотической” формой материи, нарушающей ряд стандартных энергетических условий. Построение и изучение реалистических физических моделей, в рамках которых возможно существование кротовых нор, является одним из важнейших направлений исследований в этой области. В этом направлении важные результаты были получены Бронниковым, Эллисом, Виссером и другими.

Следует отметить, что энергетические условия играют фундаментальную роль в гравитационной физике; они лежат в основе многих важных результатов, полученных в рамках ОТО. Среди них известные теоремы о сингулярностях, теорема о топологической цензуре, законы термодинамики черных дыр. Все эти результаты справедливы при определенных ограничениях, накладываемых стандартными энергетическими условиями. Интерес к проблеме существования кротовых нор и машины времени инициировал исследования, нацеленные на более детальный анализ энергетических условий. Значительный прогресс был достигнут в понимании ограничений, следующих из квантовой теории поля. В 1995 году Форд и

помощью модифицированной схемы квантования результат согласуется с другими подходами к этой проблеме, включая метод изображений и евклидов подход.

## Список основных работ по теме диссертации

1. Khabibullin A.R., Khusnutdinov N.R., Sushkov S.V. *Casimir effect in a wormhole spacetime* // Classical and Quantum Gravity.—2006.—V.23.—P.627-634.
2. Sushkov S.V. *Wormholes supported by a phantom energy* // Physical Review D.—2005.—V.71.—043520.
3. Sushkov S.V., Kim S.-W. *Cosmological evolution of a ghost scalar field* // General Relativity and Gravitation.—2004.—V.36.—P.1671.
4. Frolov V., Sushkov S.V. Zelnikov A.  $\langle \varphi^2 \rangle$  for a scalar field in 2D black holes: a new uniform approximation // Physical Review D.—2003.—V.67.—104003.
5. Sushkov S.V. *Completeness principle and quantum fields on nonglobally hyperbolic spacetimes* // Gravitation & Cosmology.—2003.—V.14.—P.225.
6. Sushkov S.V. *New form of renormalization counterterms for a scalar field* // International Journal of Modern Physics.—2002.—V.17.—P.820-824.
7. Sushkov S.V., Kim S.-W. *Wormholes supported by the kink-like configuration of a scalar field* // Classical and Quantum Gravity.—2002.—V.63.—P.4909-4922.
8. Khusnutdinov N.R., Sushkov S.V. *Ground state energy in a wormhole spacetime* // Physical Review D.—2002.—V.65.—084028.
9. Popov A.A., Sushkov S.V. *Vacuum polarization of a scalar field in wormhole spacetimes* // Physical Review D.—2001.—V.63.—044017.
10. Sushkov S.V. *Domain walls in wormhole spacetime* // Gravitation & Cosmology.—2001.—V.7.—P.197-200.
11. Sushkov S.V. *WKB approximation for  $\langle \phi^2 \rangle$  in static, spherically symmetric spacetimes* // Gravitation & Cosmology.—2000.—V.6.—P.45-48.

<sup>4</sup>Уиллер Дж. А., *Гравитация, нейтрино и Вселенная*.—М.: Изд-во ин. лит-ры—1962.—404 с.

<sup>5</sup>Morris M. S., Thorne K. S. *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity* // American Journal of Physics.—1988.—V.56.—P.395-412.; Morris M. S., Thorne K. S., Yurtsever U. *Wormholes, time machines, and the weak energy condition* // Physical Review Letters.—1988.—V.61.—P.1446-1449.

12. Sushkov S.V. *Analytical approximation of  $\langle \phi^2 \rangle$  for a massive scalar field in static spherically symmetric spacetimes* // Physical Review D.—2000.—V.62.—064007.
13. Sushkov S.V. *Particle creation near the chronology horizon* // Physical Review D.—1998.—V.58.—044006.
14. Hochberg D., Popov A., Sushkov S.V. *Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity* // Physical Review Letters.—1997.—V.78.—P.2050-2053.
15. Sushkov S.V. *Chronology protection and quantized fields: complex automorphic scalar field in Misner space* // Classical and Quantum Gravity.—1997.—V.14.—P.523-534.
16. Hochberg D., Sushkov S.V. *Black hole in thermal equilibrium with a spin-2 quantum field* // Physical Review D.—1996.—V.53.—P.7094-7102.
17. Sushkov S.V. *Quantum complex scalar field in two-dimensional spacetime with closed timelike curves and a time machine problem* // Classical and Quantum Gravity.—1995.—V.12.—P.1685-1697.
18. Сушков С.В. *Автоморфное квантованное скалярное поле в двумерной модели пространства-времени с замкнутыми времениподобными линиями и проблема машины времени* // Теоретическая и математическая физика.—1994.—Т.102.—С.134-149.
19. Sushkov S.V. *A selfconsistent semiclassical solution with a throat in the theory of gravity* // Physics Letters A.—1992.—V.164.—P.33-37.
20. Сушков С.В. *О существовании лоренцевой кротовой норы* // Ядерная Физика.—1991.—Т.53.—С.1454-1463.
21. Сушков С.В. *Космологическая эволюция кротовых нор в теории гравитации с фантомным скалярным полем* // Вестник КрасГУ. Физико-математические науки, Красноярск: Изд-во КрасГУ—2005.—№7—С.52-58
22. Сушков С.В. *Разложение Де-Витта-Швингера для тензора энергии-импульса скалярного поля* // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского, Казань: Изд-во «Унипресс»—2001.—С.250-258;
23. Sushkov S.V. *A selfconsistent semiclassical solution with a wormhole in the theory of gravity* / Sushkov S. V., Popov A. A. // in “Quantum Field

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность работы

Уравнения Эйнштейна, лежащие в основе общей теории относительности (ОТО), будучи дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, позволяют, вообще говоря, устанавливать лишь локальные свойства пространства-времени. В частности, это означает, что в ОТО оказывается возможным существование решений, описывающих пространственно-временные конфигурации с нетривиальными топологической и причинной структурами. Для характеристики глобальных свойств пространства-времени требуется физическая теория, выходящая за рамки ОТО. Возможно, такой теорией в будущем станет квантовая гравитация, на построение которой в течение многих лет направлены значительные усилия многих ученых. В отсутствие законченной квантовой теории гравитации особое значение приобретают исследования, нацеленные на изучение топологической и причинной структур пространства-времени и их связей с различными физическими процессами.

Идея о нетривиальной топологии пространства имеет долгую историю. В частности, еще в 1900 году Шварцшильд<sup>1</sup> обсуждал такую возможность и использовал представление о двойных изображениях для определения нижней границы размера Вселенной. Вопрос о топологии Вселенной и сегодня является актуальным и открытым. В последние годы исследование этой проблемы получило новый импульс в связи достижениями наблюдательной космологии.<sup>2</sup>

Важный вклад в развитие топологических идей в физике был сделан Эйнштейном и Уилером. В 1935 году Эйнштейн и Розен опубликовали работу,<sup>3</sup> в которой была предложена свободная от сингулярностей геометрическая модель элементарной “частицы”; роль частицы в этой модели выполнял “мост”, соединяющий два пространства (мост Эйнштейна-Розена; см. рис. 1). Развитием модели Эйнштейна и Розена яви-

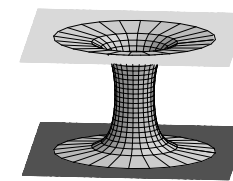


Рис. 1. Мост, связывающий две “вселенные”.

<sup>1</sup>Schwarzschild K. *On the permissible curvature of space* // Classical and Quantum Gravity.—1998.—V.15.—P.2539-2544.

<sup>2</sup>Levin J. *Topology and the cosmic microwave background* // Phys. Rept.—2002.—V.365.—P.251-333.

<sup>3</sup>Einstein A., Rosen N. *The partical problem in the general theory of gravity* // Physical Review.—1935.—V.48.—P.73-77.